

# Cramers Rule #1

$$\textcircled{1} \begin{cases} x - 3y = 19 \\ 4x + 2y = -8 \end{cases} \quad \text{denominator: } \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1(2) - (-3)(4) \\ 2 + 12 \\ 14 \end{matrix}$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} 19 & -3 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 19(2) - (-3)(-8) \\ 38 - 24 \\ 14 \end{matrix} \quad \cdot y: \begin{vmatrix} 1 & 19 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1(-8) - 19(4) \\ -8 - 76 \\ -84 \end{matrix}$$

$$x = \frac{14}{14} \quad x = 1 \quad y = \frac{-84}{14} \quad y = -6$$

$$(1, -6)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ 3x - 6y = 18 \end{cases} \quad \text{denominator: } \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 5(-6) - 4(3) \\ -30 - 12 \\ -42 \end{matrix}$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 18 & -6 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 2(-6) - 4(18) \\ -12 - 72 \\ -84 \end{matrix} \quad \cdot y: \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 5(18) - 2(3) \\ 90 - 6 \\ 84 \end{matrix}$$

$$-84 \rightarrow x = \frac{-84}{-42}$$

$$x = 2$$

$$84 \rightarrow y = \frac{84}{-42}$$

$$y = -2$$

$$(2, -2)$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} -4x - 5y = -6 \\ x + 4y = 18 \end{cases} \quad \text{denominator: } \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} -4(4) - (-5)(1) \\ -16 + 5 \\ -11 \end{matrix}$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} -6(4) - (-5)(18) \\ -24 + 90 \\ 66 \end{matrix} \quad \cdot y: \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} -4(18) - (-6)(1) \\ -72 + 6 \\ -66 \end{matrix}$$

$$x = \frac{66}{-11} \quad x = -6$$

$$y = \frac{-66}{-11} \quad y = 6$$

$$(-6, 6)$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} -5x - y = 9 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \cdot \text{denominator: } \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -5(2) - (-1)(2) \\ -10 + 2 \\ -8 \end{array}$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 9(2) - (-1)(6) \\ 18 + 6 \\ 24 \end{array} \quad \cdot y: \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -5(6) - 9(2) \\ -30 - 18 \\ -48 \end{array}$$

$$x = 24 / -8 \quad x = -3 \quad y = -48 / -8 \quad y = 6$$

$(-3, 6)$

$$\textcircled{5} \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 3x - 5y = -23 \end{cases} \cdot \text{denominator: } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 4(-5) - 2(3) \\ -20 - 6 \\ -26 \end{array}$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -23 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 4(-5) - 2(-23) \\ -20 + 46 \\ 26 \end{array} \quad \cdot y: \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -23 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 4(-23) - 4(3) \\ -92 - 12 \\ -104 \end{array}$$

$$x = 26 / -26 \quad x = -1 \quad y = -104 / -26 \quad y = 4$$

$(-1, 4)$

$$\textcircled{6} \begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ -3x + 5y = -16 \end{cases} \cdot \text{denominator: } \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2(5) - (-4)(-3) \\ 10 - 12 \\ -2 \end{array}$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -16 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 12(5) - (-4)(-16) \\ 60 - 64 \\ -4 \end{array} \quad \cdot y: \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -3 & -16 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2(-16) - 12(-3) \\ -32 + 36 \\ 4 \end{array}$$

$$x = -4 / -2 \quad x = 2 \quad y = 4 / -2 \quad y = -2$$

$(2, -2)$

$$\begin{cases} -x + y - 4z = -5 \\ 5x - y = 5 \\ 6x - 6y + 2z = -14 \end{cases} \quad \text{denom: } \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(-1 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot 0 \cdot 6) + (-4 \cdot 5 \cdot -6) - (1 \cdot 5 \cdot 2) - (-1 \cdot 0 \cdot -6) - (-4 \cdot -1 \cdot 6)$$

$$2 + 0 + 120 - 10 - 0 - 24 = 88$$

$$\text{• } x: \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ -14 & -6 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \\ -14 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(-5 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot 0 \cdot -14) + (-4 \cdot 5 \cdot -6) - (1 \cdot 5 \cdot 2) - (-5 \cdot 0 \cdot -6) - (-4 \cdot -1 \cdot -14)$$

$$10 + 0 + 120 - 10 - 0 + 56 = 176 \rightarrow x = \frac{176}{88} \quad x = 2$$

$$\text{• } y: \begin{vmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \\ 6 & -14 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 5 \\ 6 & -14 \end{vmatrix}$$

$$(-1 \cdot 5 \cdot 2) + (-5 \cdot 0 \cdot 6) + (-4 \cdot 5 \cdot -14) - (-5 \cdot 5 \cdot 2) - (-1 \cdot 0 \cdot -14) - (-4 \cdot 5 \cdot 6)$$

$$-10 + 0 + 280 + 50 - 0 + 120 = 440 \rightarrow y = \frac{440}{88} \quad y = 5$$

$$\text{• } z: \begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 6 & -6 & -14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(-1 \cdot -1 \cdot -14) + (1 \cdot 5 \cdot 6) + (-5 \cdot 5 \cdot -6) - (1 \cdot 5 \cdot -14) - (-1 \cdot 5 \cdot -6) - (-5 \cdot -1 \cdot 6)$$

$$-14 + 30 + 150 + 70 - 30 - 30 = 176 \rightarrow z = \frac{176}{88} \quad z = 2$$

$$(2, 5, 2)$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} 6x + y = 21 \\ -4x + 6y + 4z = -18 \\ 4x + 6y - 4z = -18 \end{cases} \quad \text{denom: } \begin{array}{ccc|cc} 6 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ -4 & 6 & 4 & -4 & 6 \\ 4 & 6 & -4 & 4 & 6 \end{array}$$

$$(6 \cdot 6 \cdot -4) + (1 \cdot 4 \cdot 4) + (0 \cdot -4 \cdot 6) - (1 \cdot -4 \cdot -4) - (6 \cdot 4 \cdot 6) - (0 \cdot 6 \cdot 4) \\ -144 + 16 + 0 - 16 - 144 - 0 \\ -288$$

$$\cdot x: \begin{array}{ccc|cc} 21 & 1 & 0 & 21 & 1 \\ -18 & 6 & 4 & -18 & 6 \\ -18 & 6 & -4 & -18 & 6 \end{array}$$

$$(21 \cdot 6 \cdot -4) + (1 \cdot 4 \cdot -18) + (0 \cdot -18 \cdot 6) - (1 \cdot -18 \cdot -4) - (21 \cdot 4 \cdot 6) - (0 \cdot 6 \cdot -18) \\ -504 - 72 + 0 - 72 - 504 - 0 \\ -1152 \rightarrow x = \frac{-1152}{-288} \quad x = 4$$

$$\cdot y: \begin{array}{ccc|cc} 6 & 21 & 0 & 6 & 21 \\ -4 & -18 & 4 & -4 & -18 \\ 4 & -18 & -4 & 4 & -18 \end{array}$$

$$(6 \cdot -18 \cdot 4) + (21 \cdot 4 \cdot 4) + (0 \cdot -4 \cdot -18) - (21 \cdot -4 \cdot 4) - (6 \cdot 4 \cdot -18) - (0 \cdot -18 \cdot 4) \\ 432 + 336 + 0 - 336 + 432 - 0 \\ 864 \rightarrow y = \frac{864}{-288} \quad y = -3$$

$$\cdot z: \begin{array}{ccc|cc} 6 & 1 & 21 & 6 & 1 \\ -4 & 6 & -18 & -4 & 6 \\ 4 & 6 & -18 & 4 & 6 \end{array}$$

$$(6 \cdot 6 \cdot -18) + (1 \cdot -18 \cdot 4) + (21 \cdot -4 \cdot 6) - (1 \cdot -4 \cdot -18) - (6 \cdot -18 \cdot 6) - (21 \cdot 6 \cdot 4) \\ -648 - 72 - 504 - 72 + 648 - 504 \\ -1152 \rightarrow z = \frac{-1152}{-288} \quad z = 4$$

$$(4, -3, 4)$$

$$\textcircled{9} \begin{cases} 3x + y - 6z = 1 \\ -2y - z = 10 \\ 3x + 3y - 4z = -9 \end{cases} \quad \text{denom: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(3 \cdot 2 \cdot -4) + (1 \cdot -1 \cdot 3) + (-6 \cdot 0 \cdot 3) - (1 \cdot 0 \cdot -4) - (3 \cdot -1 \cdot 3) - (-6 \cdot -2 \cdot -9)$$

$$24 - 3 + 0 - 0 + 9 - 36$$

$$-6$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & -1 & 10 & -2 \\ -9 & 3 & -4 & -9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(1 \cdot -2 \cdot -4) + (1 \cdot -1 \cdot -9) + (-6 \cdot 10 \cdot 3) - (1 \cdot 10 \cdot -4) - (1 \cdot -1 \cdot 3) - (-6 \cdot -2 \cdot -9)$$

$$8 + 9 - 180 + 40 + 3 + 108$$

$$-12 \rightarrow x = \frac{-12}{-6} \quad x = 2$$

$$\cdot y: \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 0 & 10 \\ 3 & -9 & -4 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$(3 \cdot 10 \cdot -4) + (1 \cdot -1 \cdot 3) + (-6 \cdot 0 \cdot -9) - (1 \cdot 0 \cdot -4) - (3 \cdot -1 \cdot -9) - (-6 \cdot 10 \cdot 3)$$

$$-120 - 3 + 0 - 0 - 27 + 180$$

$$30 \rightarrow y = \frac{30}{-6} \quad y = -5$$

$$\cdot z: \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 10 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(3 \cdot -2 \cdot -9) + (1 \cdot 10 \cdot 3) + (1 \cdot 0 \cdot 3) - (1 \cdot 0 \cdot -9) - (3 \cdot 10 \cdot 3) - (1 \cdot -2 \cdot 3)$$

$$54 + 30 + 0 - 0 - 90 + 6$$

$$0 \rightarrow z = \frac{0}{-6} \quad z = 0$$

$$(2, -5, 0)$$

$$\textcircled{10} \begin{cases} -4x - 4y + 4z = 24 \\ x - 2y + 5z = -6 \\ -6x \quad \quad -z = 21 \end{cases} \quad \text{denom: } \begin{vmatrix} -4 & -4 & 4 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & -2 \\ -6 & 0 & -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(-4 \cdot -2 \cdot -1) + (-4 \cdot 5 \cdot -6) + (4 \cdot 1 \cdot 0) - (-4 \cdot 1 \cdot -1) - (-4 \cdot 5 \cdot 0) - (4 \cdot -2 \cdot -6)$$

$$-8 + 120 + 0 - 4 - 0 - 48 = 60$$

$$\cdot x: \begin{vmatrix} 24 & -4 & 4 & 24 & -4 \\ -6 & -2 & 5 & -6 & -2 \\ 21 & 0 & -1 & 21 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(24 \cdot -2 \cdot -1) + (-4 \cdot 5 \cdot 21) + (4 \cdot -6 \cdot 0) - (-4 \cdot -6 \cdot -1) - (24 \cdot 5 \cdot 0) - (4 \cdot -2 \cdot 21)$$

$$48 - 420 + 0 + 24 - 0 + 168 = -180 \rightarrow x = \frac{-180}{60} \quad x = -3$$

$$\cdot y: \begin{vmatrix} -4 & 24 & 4 & -4 & 24 \\ 1 & -6 & 5 & 1 & -6 \\ -6 & 21 & -1 & -6 & 21 \end{vmatrix}$$

$$(-4 \cdot -6 \cdot -1) + (24 \cdot 5 \cdot -6) + (4 \cdot 1 \cdot 21) - (24 \cdot 1 \cdot -1) - (-4 \cdot 5 \cdot 21) - (4 \cdot -6 \cdot -6)$$

$$-24 - 720 + 84 + 24 + 420 - 144 = -360 \rightarrow y = \frac{-360}{60} \quad y = -6$$

$$\cdot z: \begin{vmatrix} -4 & -4 & 24 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -6 & 1 & -2 \\ -6 & 0 & 21 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(-4 \cdot -2 \cdot 21) + (-4 \cdot -6 \cdot -6) + (24 \cdot 1 \cdot 0) - (-4 \cdot 1 \cdot 21) - (-4 \cdot -6 \cdot 0) - (24 \cdot -2 \cdot -6)$$

$$168 - 144 + 0 + 84 - 0 - 288 = -180 \rightarrow z = \frac{-180}{60} \quad z = -3$$

$$\boxed{(-3, -6, -3)}$$

$$\textcircled{11} \begin{cases} x - y + 6z = -3 \\ 6x + 4y + 3z = 25 \\ -y + 4z = -5 \end{cases} \quad \text{denom: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(1 \cdot 4 \cdot 4) + (-1 \cdot 3 \cdot 0) + (6 \cdot 6 \cdot -1) - (-1 \cdot 6 \cdot 4) - (1 \cdot 3 \cdot -1) - (6 \cdot 4 \cdot 0)$$

$$16 + 0 - 36 + 24 + 3 - 0$$

7

$$\cdot x: \begin{vmatrix} -3 & -1 & 6 & -3 & -1 \\ 25 & 4 & 3 & 25 & 4 \\ -5 & -1 & 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(-3 \cdot 4 \cdot 4) + (-1 \cdot 3 \cdot -5) + (6 \cdot 25 \cdot -1) - (-1 \cdot 25 \cdot 4) - (-3 \cdot 3 \cdot -1) - (6 \cdot 4 \cdot -5)$$

$$-48 + 15 - 150 + 100 - 9 + 120$$

$$28 \rightarrow x = \frac{28}{7} \quad x = 4$$

$$\cdot y: \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 1 & -3 \\ 6 & 25 & 3 & 6 & 25 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(1 \cdot 25 \cdot 4) + (-3 \cdot 3 \cdot 0) + (6 \cdot 6 \cdot -5) - (-3 \cdot 6 \cdot 4) - (1 \cdot 3 \cdot -5) - (6 \cdot 25 \cdot 0)$$

$$100 + 0 - 180 + 72 + 15 - 0$$

$$7 \rightarrow y = \frac{7}{7} \quad y = 1$$

$$\cdot z: \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 25 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(1 \cdot 4 \cdot -5) + (-1 \cdot 25 \cdot 0) + (-3 \cdot 6 \cdot -1) - (-1 \cdot 6 \cdot -5) - (1 \cdot 25 \cdot -1) - (-3 \cdot 4 \cdot 0)$$

$$-20 + 0 + 18 - 30 + 25 - 0$$

$$-7 \rightarrow z = \frac{-7}{7} \quad z = -1$$

$$(4, 1, -1)$$

$$\textcircled{12} \begin{cases} -2y + 5z = 11 \\ 6x - 2y - 6z = -30 \\ x - 4y + 5z = 12 \end{cases}$$

denom:  $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 & | & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -6 & | & 6 & -2 \\ 1 & -4 & 5 & | & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$$(0 \cdot -2 \cdot 5) + (-2 \cdot -6 \cdot 1) + (5 \cdot 6 \cdot -4) - (-2 \cdot 6 \cdot 5) - (0 \cdot -6 \cdot -4)$$

$$0 + 12 - 120 + 60 - 0 + 10 \quad \text{---} (5 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$-38$$

x:  $\begin{vmatrix} 11 & -2 & 5 & | & 11 & -2 \\ -30 & -2 & -6 & | & -30 & -2 \\ 12 & -4 & 5 & | & 12 & -4 \end{vmatrix}$

$$(11 \cdot -2 \cdot 5) + (-2 \cdot -6 \cdot 12) + (5 \cdot -30 \cdot -4) - (-2 \cdot -30 \cdot 5) - (11 \cdot -6 \cdot -4) - (5 \cdot -2 \cdot 12)$$

$$-110 + 144 + 600 - 300 - 264 + 120$$

$$190 \rightarrow x = 190 / -38 \quad x = -5$$

y:  $\begin{vmatrix} 0 & 11 & 5 & | & 0 & 11 \\ 6 & -30 & -6 & | & 6 & -30 \\ 1 & 12 & 5 & | & 1 & 12 \end{vmatrix}$

$$(0 \cdot -30 \cdot 5) + (11 \cdot -6 \cdot 1) + (5 \cdot 6 \cdot 12) - (11 \cdot 6 \cdot 5) - (0 \cdot -6 \cdot 12) - (5 \cdot -30 \cdot 1)$$

$$0 - 66 + 360 - 330 - 0 + 150$$

$$114 \rightarrow y = 114 / -38 \quad y = -3$$

z:  $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 11 & | & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -30 & | & 6 & -2 \\ 1 & -4 & 12 & | & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$$(0 \cdot -2 \cdot 12) + (-2 \cdot -30 \cdot 1) + (11 \cdot 6 \cdot -4) - (-2 \cdot 6 \cdot 12) - (0 \cdot -30 \cdot -4) - (11 \cdot -2 \cdot 1)$$

$$0 + 60 - 264 + 144 - 0 + 22$$

$$-38 \rightarrow z = -38 / -38 \quad z = 1$$

$$\boxed{(-5, -3, 1)}$$